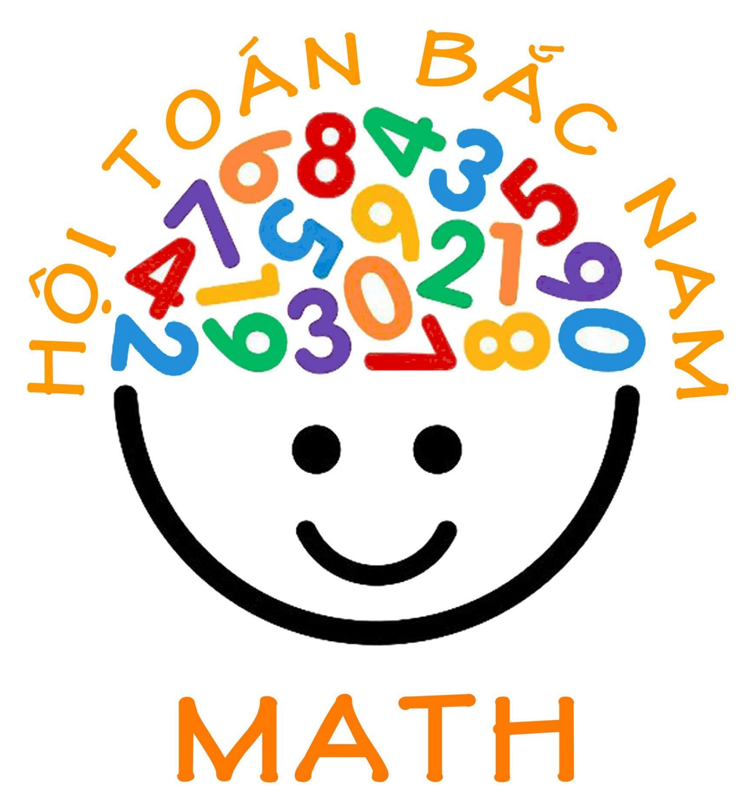
HỘI TOÁN BẮC NAM



THÁNG MỘT CHỦ ĐỀ

CHUYÊN ĐỀ LƯỢNG GIÁC

BUÔN MA THUỘT, 12/2016

MỞ ĐẦU

Lượng giác đóng vai trò quan trọng và xuyên suốt trong chương trình toán phổ thông và được ứng dụng khá nhiều trong thực tế, đặc biệt là trong lĩnh vực nghiên cứu thiên văn. Đây sẽ là một trong những vấn đề quan trọng trong kì thi THPT quốc gia 2018, khi chương trình 10 và 11 được đưa vào trong đề thi.

Trong chủ đề tháng 12/2016 của Hội Toán Bắc Nam tôi xin trình bày một số vấn đề về lượng giác.

Chủ đề lượng giác được chia làm ba phần:

Phần 1: Cơ sở lí thuyết như cung liên kết, công thức lượng giác, hằng đẳng thức lượng giác, hàm số lượng giác.

Phần 2: Các dạng phương trình lượng giác thường gặp.

Phần 3: Một số bài toán lượng giác điển hình có liên quan.

Chuyên đề chủ yếu xoay quanh các bài toán THPT, hi vọng sẽ giúp ích được phần nào cho bạn đọc, đặc biệt là các bạn học sinh THPT.

Sẽ không tránh khỏi thiếu sót khi biên tập, rất mong nhận được sự đóng góp từ quý bạn đọc để chuyên đề ngày một hoàn thiện hơn.

Mọi ý kiến đóng góp, quý bạn đọc vui lòng gửi về địa chỉ

email: phamthithuhien117@gmail.com hoặc gửi trực tiếp cho Hội Toán Bắc Nam.

Buôn Ma Thuột, ngày 15 tháng 12 năm 2016

Mục lục

Chương 1

CƠ SỞ LÝ THUYẾT

1.1 Cung liên kết

Cung đối:

$$\cos(-x) = \cos x;\ \ \sin(-x) = -\sin x;$$

$$\tan(-x) = -\tan x;\ \ \cot(-x) = -\cot x.$$

Cung bù:

$$\cos(\pi - x) = -\cos x;\ \ \sin(\pi - x) = \sin x;$$

$$\tan(\pi - x) = -\tan x;\ \ \cot(\pi - x) = -\cot x.$$

Cung phụ:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x;\ \ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x;$$
$$\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \cot x;\ \ \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan x.$$

Cung hơn kém nhau π:

$$\cos(\pi + x) = -\cos x;\ \ \sin(\pi + x) = -\sin x;$$

$$\tan(\pi + x) = \tan x;\ \ \cot(\pi + x) = \cot x.$$

1.2 Công thức lượng giác

1. Công thức cộng

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$
$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$
$$\cot(a+b) = \frac{\cot \mathrm{a} \cot b - 1}{\cot \mathrm{a} + \cot b}$$

2. Công thức nhân đôi

$$\sin 2a = 2\sin a.\cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$
$$= 2\cos^2 a - 1$$
$$= 1 - 2\sin^2 a$$
$$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$

3. Công thức nhân ba

$$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$$

$$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$$

4. Công thức hạ bậc

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2};\ \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$
$$\sin^3 a = \frac{3\sin a - \sin 3a}{4};\ \cos^3 a = \frac{3\cos a + \cos 3a}{4}$$

5. Công thức tổng thành tích

$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$
$$\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$$
$$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$
$$\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$$

6. Công thức tích thành tổng

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$$

$$\sin a \sin b = \frac{-1}{2}\left[\cos(a+b) - \cos(a-b)\right]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$$

1.3 Hằng đẳng thức thường dùng

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1;\ \sin^4 a + \cos^4 a = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2a\ ;\ \sin^6 a + \cos^6 a = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2a$$

$$1 + \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a};\ 1 + \cot^2 a = \frac{1}{\sin^2 a};\ 1 \pm \sin 2a = (\sin a \pm \cos a)^2$$

1.4 Hàm số lượng giác

Hàm số	Tập xác định	Tập giá trị	Tính chẵn lẻ	Chu kỳ
$y = \sin x$	D=$\mathbb{R}$	T=[-1,1]	hàm lẻ	$T_0 = 2\pi$
$y = \cos x$	D=$\mathbb{R}$	T=[-1,1]	hàm chẵn	$T_0 = 2\pi$
$y = \tan x$	$\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	T=$\mathbb{R}$	hàm lẻ	$T_0 = \pi$
$y = \cot x$	$\mathbb{R}\backslash\left\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	T=$\mathbb{R}$	hàm lẻ	$T_0 = \pi$

Bảng 1.1: *

Chương 2

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

2.1 Phương trình lượng giác cơ bản

1. Phương trình $\sin x = a$

   • Nếu |a| > 1 : Phương trình vô nghiệm

   • Nếu |a| $\leqslant 1$: Phương trình có nghiệm là $x = \alpha + k2\pi$ và $x = \pi - \alpha + k2\pi$ với $\sin \alpha = a$

   Các trường hợp đặc biệt:

   $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$

   $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

   $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

   $\sin x = \pm 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

2. Phương trình $\cos x = a$

   • Nếu |a| > 1 : Phương trình vô nghiệm

   • Nếu |a| $\leqslant 1$: Phương trình có nghiệm là $x = \alpha + k2\pi$ và $x = -\alpha + k2\pi$ với $\cos \alpha = a$

   Các trường hợp đặc biệt:

   $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

   $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

   $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

$\cos x = \pm 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$

3. Phương trình $\tan x = a$

   Điều kiện $\cos x \neq 0$ hay $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

   Nghiệm của phương trình $x = \alpha + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ với $\tan \alpha = a$

   Các trường hợp đặc biệt:

   $\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$ $\tan x = \pm 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

4. Phương trình $\cot x = a$

   Điều kiện $\sin x \neq 0$ hay $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

   Nghiệm của phương trình $x = \alpha + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ với $\cot \alpha = a$

   Các trường hợp đặc biệt:

   $\cot x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ $\cot x = \pm 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

BÀI TẬP

Bài 1: Giải các phương trình sau:

1. $\sin x = \sin \frac{\pi}{5}$
2. $\sin x = \frac{1}{2}$
3. $\sin 2x = \frac{5}{4}$
4. $2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{3} = 0$
5. $2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{3} = 0$
6. $2\sin\left(90^0 - 2x\right) + 1 = 0$
7. $\sin x = \frac{1}{3}$
8. $4\sin^2\left(x + 40^0\right) - 1 = 0$
9. $\sin 3x - \cos 2x = 0$
10. $\sin 4x + \cos 5x = 0$

Bài 2: Giải các phương trình sau

1. $\cos x = \dfrac{1}{2}$
2. $\cos(3x+1) = \cos(x-2)$
3. $\sin(x-120^0) + \cos 2x = 0$
4. $\cos 3x + \cos 4x = 0$
5. $\cos 2x + \sin 3x = 0$
6. $3\cos(2x+1) - 4 = 0$
7. $\cos(2x+1) - \cos(x + \dfrac{\pi}{3}) = 0$
8. $3\cos(x - \dfrac{\pi}{4}) + 1 = 0$
9. $2\cos^2 x + \cos x = 0$
10. $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 0$

Bài 3: Giải các phương trình sau

1. $\tan 7x - \cot 9x = 0$
2. $\tan^2(x - \dfrac{\pi}{4}) = 3$
3. $\tan 3x + \cot x = 0$
4. $3\tan(2x - \dfrac{\pi}{4}) - 5 = 0$
5. $|\cos x| = \frac{1}{2}$
6. $\cos 3x.\tan 5x = \sin 7x$
7. $\tan 5x.\tan 2x = 1$
8. $|\sin x| + \cos 3x = 0$
9. $\cot(2x - \dfrac{\pi}{4}) = \cot(x + \dfrac{\pi}{3})$

10. $\cot(3x+10^0)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

11. $\cos(x+45^0)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

12. $\sin^2(x-\dfrac{\pi}{4})=\cos^2 x$

Bài 4: Giải các phương trình sau

1. $\sqrt{3}\tan(x-50^0)-1=0$ với $x\in[-180^0,270^0]$
2. $\cot(x-\dfrac{\pi}{3})+\sqrt{3}=0, x\in[-\dfrac{\pi}{2};2\pi]$
3. $\sin^2 x+\cos^2 3x=1$
4. $\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x=0$
5. $\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x=0$
6. $\cos x.\cos 7x=\cos 3x.\cos 5x$
7. $\sin^2 x+\sin^2 2x=\sin^2 3x+\sin^2 4x$
8. $\cos 5x.\sin 4x=\cos 3x.\sin 2x$
9. $\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x=\dfrac{3}{2}$
10. $\sin(\cos(x-\dfrac{\pi}{4}))=\dfrac{1}{2}$

2.2 Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác

Dạng

$$a\sin^2 x+b\sin x+c=0$$

Đặt $t=\sin x$ điều kiên $-1\leqslant t\leqslant 1$.

$$a\cos^2 x+b\cos x+c=0$$

Đặt $t=\cos x$ điều kiên $-1\leqslant t\leqslant 1$.

$$a\tan^2 x+b\tan x+c=0$$

Điều kiện $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Đặt $t = \tan x$.

$$a\cot^2 x + b\cot x + c = 0$$

Điều kiện $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Đặt $t = \cot x$.

Nếu đặt $t = \sin^2 x$ hoặc $t = |\sin x|$ thì điều kiện $0 \leqslant t \leqslant 1$ Bài tập

1. $3\cos 2x - 5\cos x + 2 = 0$
2. $3\tan 2x - 2\tan x + 3 = 0$
3. $2\sin^2\frac{x}{2} + \sqrt{2}\sin\frac{x}{2} - 2 = 0$
4. $2\cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 5\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 4 = 0$
5. $\sin^4 x + \cos^4 x = \cos 2x$
6. $2\sqrt{2}\cos^2 3x - \left(2 + \sqrt{2}\right)\cos 3x + 1 = 0$
7. $\cos^4\frac{x}{2} + \sin^4\frac{x}{2} + 2\sin x = 1$
8. $2\tan x + 3\cot x = 4$
9. $2\tan x + \cot x = 2\sin 2x + \frac{1}{\sin 2x}$
10. $4\sin^5 x\cos x - 4\cos^5 x\sin x = \cos^2 4x + 1$
11. $\sin 3x + \cos 2x = 1 + 2\sin x\cos 2x$
12. $\cos 4x = \cos^2 3x - \cos^2 x + 1$

2.3 Phương trình bậc nhất theo sinx và cosx

Dạng

$$a\sin x + b\cos x = c(1)$$

Phương pháp:

Chia cả 2 vế phương trình cho $\sqrt{a^2 + b^2}$ ta được:

$(1) \Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ s inx + $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Đặt $\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, (\alpha \in [0, 2\pi])$

(1) trở thành $\sin\alpha.\,$s inx $+ \cos\alpha.\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\Leftrightarrow \cos(x-\alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\beta$ (2)

Điều kiện để phương trình (2) có nghiệm là:

$\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leqslant 1 \Leftrightarrow a^2+b^2 \geqslant c^2.$

$(2) \Leftrightarrow x = \alpha \pm \beta + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

Bài tập

Giải các phương trình sau

1. $\sqrt{3}\sin x - \cos x + \sqrt{2} = 0$
2. $3\sin 2x + 2\cos 2x = 3$
3. $4\cos 3x - 3\sin 3x + 5 = 0$
4. $2\sin 3x + \sqrt{3}\cos 7x + \sin 7x = 0$
5. $\cos 5x - \sin 3x = \sqrt{3}(\cos 3x - \sin 5x)$
6. $3\sin x - 1 = 4\sin^3 x + \sqrt{3}\cos 3x$
7. $\cos x + \sqrt{3}\sin x = \frac{3}{2}$
8. $(2\sin x - \cos x)(1 + \cos x) = \sin^2 x$
9. $\sin x\cos x - \sin^2 x = \cos 2x$
10. $\sqrt{3}\sin x + \cos x + 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 2$

2.4 Phương trình thuần nhất

1. Phương trình thuần nhất bậc 2

Dạng:

$$a\sin^2 x + b\sin x.\cos x + c\cos^2 x = \text{d} \quad (1)$$

Phương pháp: Xét $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$có thỏa mãn không?

Xét $\cos x \neq 0$, chia cả 2 vế của (1) cho $\cos^2 x$

Ví dụ 2.1. Giải phương trình

$2\sin^2 x - 5\sin x.\cos x - \cos^2 x = -2(1)$

Giải

Ta thấy $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ không thỏa mãn (1)

Xét $\cos x \neq 0$, chia cả 2 vế của (1) cho $\cos^2 x$:

$$\Leftrightarrow \frac{2\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{5\sin x}{\cos x} - 1 = -\frac{2}{\cos^2 x}$$

$$\Leftrightarrow 2\tan^2 x - 5\tan x - 1 = -2(1 + \tan^2 x)$$

$$\Leftrightarrow 4\tan^2 x - 5\tan x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \tan x = \frac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan\frac{1}{4} + k\pi \end{array}\right. \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ví dụ 2.2. Giải phương trình

$\sin^2 x + \sin 2x - 2\cos^2 x = \frac{1}{2}$

Giải

$\sin^2 x + \sin 2x - 2\cos^2 x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \sin^2 x + 2\sin x.\cos x - 2\cos^2 x = \frac{1}{2}(1)$

Ta thấy $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ không thỏa mãn (1)

Xét $\cos x \neq 0$, chia cả 2 vế của (1) cho $\cos^2 x$:

$$(1) \Leftrightarrow \tan^2 x + 2\tan x - 2 = \frac{1}{2}\left(1 + \tan^2 x\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\tan^2 x + 2\tan x - \frac{5}{2} = 0$$
$$\Leftrightarrow \tan^2 x + 4\tan x - 5 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \tan x = -5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan(-5) + k\pi \end{array}\right.$$

Ví dụ 2.3. Giải phương trình

$\sin x + \cos x = \frac{1}{\sin x}(1)$

Giải

Điều kiện $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\sin^2 x}$$
$$\Leftrightarrow 1 + \cot x = 1 + \cot^2 x$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cot x = 0 \\ \cot x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right.$$

2. Phương trình thuần nhất bậc 3

Dạng:

$$a\sin^3 x + b\sin^2 x.\cos x + c\sin x\cos^2 x + d\cos^3 x = ... \quad (1)$$

Phương pháp: Xét $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$có thỏa mãn không?

Xét $\cos x \neq 0$, chia cả 2 vế của (1) cho $\cos^3 x$

Ví dụ 2.4. Giải phương trình

$$\cos^3 x - 3\cos^2 x\sin x + 2\sin^3 x = 0(1)$$

Giải

Xét $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$có thỏa mãn không?

Xét $\cos x \neq 0$, chia cả 2 vế của (1) cho $\cos^3 x$

$$
\begin{aligned}
&(1) \Leftrightarrow 1 - 3\tan x + 2\tan^3 x = 0\\
&\Leftrightarrow 2\tan^3 x - 3\tan x + 1 = 0\\
&\Leftrightarrow (\tan x - 1)\left(2\tan^2 x + 2\tan x - 1\right) = 0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \tan x = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ \tan x = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\right) + k\pi \\ x = \arctan\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}\right) + k\pi \end{array}\right.
\end{aligned}
$$

Ví dụ 2.5. Giải phương trình

$$6\sin x - 2\cos^3 x = 5\sin 2x\cos x(1)$$

Giải

Xét $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$có thỏa mãn không?

Xét $\cos x \neq 0$, chia cả 2 vế của (1) cho $\cos^3 x$

$$
\begin{aligned}
&(1) \Leftrightarrow \frac{6\sin x}{\cos^3 x} - 2 = \frac{10\sin x}{\cos x}\\
&\Leftrightarrow 6\tan x\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right) - 2 = 10\tan x\\
&\Leftrightarrow 6\tan x\left(1 + \tan^2 x\right) - 2 = 10\tan x\\
&\Leftrightarrow 6\tan^3 x - 4\tan x - 2 = 0\\
&\Leftrightarrow (\tan x - 1)(6\tan^2 x + 6\tan x + 2) = 0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x - 1 = 0 \\ 6\tan^2 x + 6\tan x + 2 = 0(VN) \end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi
\end{aligned}
$$

Bài tập

Giải các phương trình sau

1. $2\sin 2x - 3\cos^2 x + 5\sin x\cos x - 2 = 0$
2. $2\sin^2 x + \sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$
3. $3\sin^2 x + 4\sin 2x + \left(8\sqrt{3} - 9\right)\cos^2 x = 0$
4. $\sqrt{3}\cos^3 x - 5\sin^3 x + 7\sin x - \dfrac{8}{\sqrt{3}}\cos x = 0$
5. $6\sin x - 2\cos^3 x = \dfrac{5\sin 4x\cos x}{2\cos 2x}$
6. $3\sin^2 x - 2\sin 2x + \cos^2 x = 0$
7. $4\cos^3 x + 2\sin^3 x - 3\sin x = 0$
8. $3\cos^3 x + 4\sin^3 x - 3\sin x - \sin^2 x.\cos x = 0$
9. $3(\cos^3 x - \sin^3 x) = (4 + \sin 2x)\cos x$
10. $4(\cos^3 x + \sin^3 x) = \sin x + 3\cos x$

2.5 Phương trình đối xứng

Dạng 1: $a\left(\sin x + \cos x\right) + b.\sin x.\cos x + c = 0$

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}.\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right); |t| \leqslant \sqrt{2}$

$\Rightarrow t^2 = 1 + 2\sin x.\cos x \Rightarrow \sin x.\cos x = \dfrac{t^2 - 1}{2}$

Thay vào phương trình đã cho ta được phương trình bậc hai theo t.

Giải phương trình này tìm t thỏa điều kiện $|t| \leqslant \sqrt{2}$ từ đó suy ra x.

Pt $a\left(\sin x - \cos x\right) + b.\sin x.\cos x + c = 0$ tương tự.

Dạng 2: $a\left|\sin x + \cos x\right| + b.\sin x.\cos x + c = 0$

$t = \left|\sin x + \cos x\right| = \sqrt{2}.\left|\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)\right|; 0 \leqslant t \leqslant \sqrt{2}$

$\Rightarrow \sin x.\cos x = \dfrac{t^2 - 1}{2}$

Pt $a\left|\sin x - \cos x\right| + b.\sin x.\cos x + c = 0$ tương tự.

Dạng 3 : Phương trình đối xứng theo tan và cot.

Đặt $t = \tan x + \cot x; x \neq k\dfrac{\pi}{2}, |t| \geqslant 2$

Ví dụ 2.6. Giải phương trình

$3(\sin x + \cos x) + 2.\sin 2x + 3 = 0$

Giải

$3(\sin x + \cos x) + 2.\sin 2x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow 3(\sin x + \cos x) + 4.\sin x.\cos x + 3 = 0$

Đặt $t = \sin x + \cos x; |t| \leqslant \sqrt{2}$

$\Rightarrow \sin x.\cos x = \dfrac{t^2 - 1}{2}$

$\Rightarrow 3t + 2t^2 - 2 + 3 = 0$

$\Leftrightarrow 2t^2 + 3t + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x + \cos x = -1\,(1) \\ \sin x + \cos x = -\dfrac{1}{2}\,(2) \end{array}\right.$$

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -1$

$\Leftrightarrow \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\dfrac{3\pi}{4}$

$\Leftrightarrow x - \dfrac{\pi}{4} = \pm\dfrac{3\pi}{4} + k2\pi$

$(2) \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{-1}{2\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow x - \dfrac{\pi}{4} = \pm \arccos\dfrac{-1}{2\sqrt{2}} + k2\pi$

Ví dụ 2.7. Giải phương trình

$6(\cos x - \sin x) + \sin x\cos x = -6$ (1)

Giải

Đặt $t = \cos x - \sin x; |t| \leqslant \sqrt{2}$

$\Rightarrow \sin x.\cos x = \frac{1-t^2}{2}$ thay vào (1)

$6t + \dfrac{1 - t^2}{2} = -6$

$\Leftrightarrow 12t + 1 - t^2 = -12$

$$\Leftrightarrow t^2 - 12t - 13 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1\,(N) \\ t = 13\,(L) \end{array}\right.$$

$t=-1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-1$

$\Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+k2\pi \\ x+\frac{\pi}{4}=-\frac{3\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \\ x=\pi+k2\pi \end{array}\right.$

Bài tập:

Bài 1: Giải các phương trình sau:

1. $2(\sin x+\cos x)+\sin 2x+1=0$

2. $\sin x\cos x=6(\sin x-\cos x-1)$

3. $\sin 2x+\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1$

4. $\tan x-2\sqrt{2}\sin x=1$

5. $\sin^3 x+\cos^3 x=1$

6. $\cos^3 x-\sin^3 x=\cos 2x$

7. $\sin^3 x+\cos^3 x+2(\sin x+\cos x)-3\sin 2x=0$

8. $2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\tan x+\cot x$

9. $(\sin x+\cos x)^4-3\sin 2x-1=0$

10. $\sin x+\cos x+2+\tan x+\cot x+\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}=0$

11. $\sin x+\cos x+2+\tan x+\cot x+\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}=0$

12. $9(\tan x+\cot x)^4=48\left(\tan^2 x+\cot^2 x\right)+96$

13. $3(\tan x-\cot x)+\tan^2 x+\cot^2 x=6$

14. $\sin x+\cos x+2+\tan x+\cot x+\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}=0$

15. $3(\tan x+\cot x)^4-8\left(\tan^2 x+\cot^2 x\right)=21$

2.6 Phương trình không mẫu mực

A. Phương pháp đưa về phương trình tích

Mình hay nói vui là phương pháp chia để trị.

Dạng:

$$A.B = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = 0 \\ B = 0 \end{array}\right.$$

Ví dụ 2.8. Giải phương trình

$2\sin x(1 + \cos 2x) + \sin 2x = 1 + 2\cos x$

Giải

$2\sin x(1 + \cos 2x) + \sin 2x = 1 + 2\cos x$

$\Leftrightarrow 2\sin x(1 + 2\cos^2 x - 1) + 2\sin x \cos x = 1 + 2\cos x$

$\Leftrightarrow 4\sin x \cos^2 x + 2\sin x \cos x = 1 + 2\cos x$

$\Leftrightarrow \sin 2x(1 + 2\cos x) = 1 + 2\cos x$

$\Leftrightarrow (1 + 2\cos x)(\sin 2x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 + 2\cos x = 0 \\ \sin 2x - 1 = 0 \end{array}\right.$

Bài tập

Giải các phương trình lượng giác sau

1. $(2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x$
2. $2\cos^3 x + \cos 2x + \sin x = 0$
3. $2\sin x + \cos 3x + \sin 2x = 1 + \sin 4x$
4. $(1 - \cot x)\sin^3 x + (\cos x - \sin x)\cos^2 x = \cos x + \sin x$
5. $(1 - \cos x)\cot x + \cos 2x + \sin x = \sin 2x$
6. $1 + \sin x + 2\cos x = (1 + \cos x)\cot x$
7. $(2\sin x + 1)(3\cos 4x + 2\sin x - 4) + 4\cos^2 x = 3$
8. $\cos 3x + \cos 2x - \cos x - 1 = 0$
9. $\sin 3x = \cos x.\cos 2x(\tan^2 x + \tan 2x)$

10. $8\sin(x+\frac{\pi}{6})+\tan x+\cot x=4\cot 2x$

11. $5\sin x-2=3(1-\sin x).tan^2x$

12. $\cos 10x-\cos 8x-\cos 6x+1=0$

B.Nhóm phương trình lượng giác có cung phức tạp

1. $\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\sin\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)}=4\sin\left(\frac{7\pi}{4}-x\right).$

2. $\frac{(1+\mathrm{s}\,\mathbf{inx}+c\mathbf{os}2x)\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{1+\mathrm{t}\,\mathbf{anx}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x.$

3. $\tan(\frac{3\pi}{2}-x)+\frac{\sin x}{1+\cos x}=2$

4. $\sin(2x-\frac{\pi}{4})=\sin(x-\frac{\pi}{4})+\frac{\sqrt{2}}{2}$

5. $2\sin(x+\frac{\pi}{3})-\sin(2x-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$

6. $\sin^2(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}).\tan^2 x-\cos^2\frac{x}{2}=0$

7. $\sin(\frac{5x}{2}-\frac{\pi}{4})-\cos(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}.\cos\frac{3x}{2}$

8. $1+\sin x+\cos x=2\cos(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4})$

9. $1+\tan x=2\sqrt{2}.\sin(x+\frac{\pi}{4})$

10. $\sin x+\sin(x+\frac{\pi}{3})+\sin 4x=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$

Chương 3

MỘT SỐ VẤN ĐỀ KHÁC

3.1 GTLN-GTNN

Những điểm cần chú ý:

1. Phương trình $a\sin x + b\cos x = c$ có nghiệm $\Leftrightarrow a^2 + b^2 \geqslant c^2$
2. BĐT Bunhiacopxki $|a.x + b.y| \leqslant \sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)}$

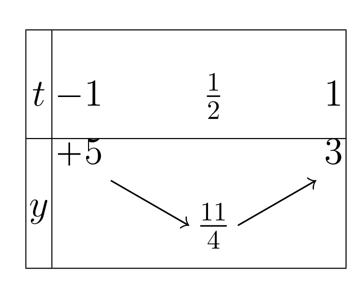
Ví dụ 3.1. Tìm GTLN, GTNN của hàm số

$y = \cos^2 x - \cos x + 3$

Đặt $t = \cos x$,

$y = t^2 - t + 3$

BBT



$Maxy = 5$ khi $t = -1 \Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$

$Miny = \dfrac{11}{4}$ khi $t = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$

Ví dụ 3.2. Tìm GTLN-GTNN của hàm số

$y = \dfrac{\sqrt{3}\cos x}{2 + \sin x}(1)$

Giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

(1)$\Leftrightarrow 2y + y\sin x = \sqrt{3}\cos x$

$\sqrt{3}\cos x - y\sin x = 2y(2)$

Phương trình (2) có nghiệm

$\Leftrightarrow 3 + (-y)^2 \geqslant (2y)^2$

$\Leftrightarrow 3 + y^2 \geqslant 4y^2$

$\Leftrightarrow 3 \geqslant 3y^2$

$\Leftrightarrow y^2 \leqslant 1$

$\Leftrightarrow -1 \leqslant y \leqslant 1$

Vậy $Maxy = 1$

$Miny = -1$

Bài tập:

Bài 1 Tìm GTLN-GTNN của mỗi hàm số sau:

1. $y = \cos 2x + 4\sin x + 1$
2. $y = (4 + \cos x)(4 + \sin x)$
3. $y = \sin x + \cos x - \sin 2x - 2$
4. $y = \dfrac{\cos x - \sin x + 1}{\sin x + 2\cos x - 4}$
5. $y = \dfrac{\cos 3x + \sin 3x + 1}{\cos 3x + 2}$
6. $y = \dfrac{1 - 3\sin x + 2\cos x}{2 + \sin x + \cos x}$
7. $y = \dfrac{\sin x\cos x + \cos^2 x}{\sin x\cos x + 1}$
8. $y = 5 + \dfrac{1}{2}\cos x\, s\sin x$
9. $y = \sqrt{3 - cos\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)} + 2$

3.2 NHẬN DẠNG TAM GIÁC

Những điểm cần lưu ý

1. $\sin(A+B) = \sin C$
2. $\cos(A+B) = -\cos C$
3. $\sin\dfrac{A+B}{2} = \cos\dfrac{C}{2}$
4. $\cos\dfrac{A+B}{2} = \sin\dfrac{C}{2}$
5. Định lí côsin

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$$
$$\Rightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

6. Định lí sin: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$

Ví dụ 3.3. Tam giác ABC có tính chất gì nếu: $\dfrac{\sin A}{\sin B.\sin C} = 2(1)$

$$(1) \Leftrightarrow \sin A = 2\sin B.\sin C$$
$$\Leftrightarrow \sin(B+C) = 2\sin B.\cos C$$
$$\Leftrightarrow \sin B.\cos C + \cos B\sin C = 2\sin B.\cos C$$
$$\Leftrightarrow \sin B.\cos C - \cos B\sin C = 0$$
$$\Leftrightarrow \sin(B-C) = 0$$
$$\Leftrightarrow B - C = k\pi$$

Vì B, C là 2 góc của tam giác nên $k = 0 \Leftrightarrow B = C$. Vậy tam giác ABC cân ở A.

Ví dụ 3.4. Chứng minh rằng nếu $\cos A.\cos B.\cos C = \dfrac{1}{8}$ thì tam giác ABC đều.

Chứng minh

$(1) \Leftrightarrow 8\cos A.\cos B.\cos C = 1$

$\Leftrightarrow 8\cos A.\frac{1}{2}\left[\cos(B+C) + \cos(B-C)\right] = 1$

$\Leftrightarrow 4\cos A.\left[-\cos A + \cos(B-C)\right] = 1$

$\Leftrightarrow -4{\cos^2}A + 4\cos A.\cos(B-C) = 1$

$\Leftrightarrow 4{\cos^2}A - 4\cos A.\cos(B-C) + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 4{\cos^2}A - 4\cos A.\cos(B-C) + \cos^2(B-C) + \sin^2(B-C) = 0$

$\Leftrightarrow \left[2\cos A - \cos(B-C)\right]^2 + \sin^2(B-C) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos A - \cos(B-C) = 0 \\ \sin(B-C) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos A = \cos(B-C) \\ B - C = k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos A = 1 \\ B = C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos A = \frac{1}{2} \\ B = C \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} A = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ B = C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{\pi}{3} \\ B = C \end{cases} \Leftrightarrow A = B = C = \frac{\pi}{3}$

Vậy tam giác ABC là tam giác đều.

Bài tập

Bài 1: Chứng mình tam giác ABC vuông biết:

a) ${\cos^2}A + {\cos^2}B + {\cos^2}C = 1$

b) $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{2}$

c) $\frac{\sin A + \cos B}{\sin B + \cos A} = \tan A$

d) $\frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C} = \sin A$

e) $\cos B + \cos C = \frac{b + c}{a}$

f) $\cot\frac{B}{2} = \frac{a + c}{b}$

g) $\sin 2A + \sin 2B = 4\sin A.\sin B$

Bài 2:Chứng mình tam giác ABC cân biết:

a) $\dfrac{\sin C}{\sin B} = 2\cos A$

b) $\dfrac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A + \sin B - \sin C} = \cot\dfrac{A}{2}\cot\dfrac{C}{2}$

c) $\tan A + \tan B = 2\cot\dfrac{C}{2}$

d) $\dfrac{b-c}{b+c} = \tan\dfrac{B-C}{2}$

e) $a\tan A + b\tan B = (a+b)\tan\dfrac{A+B}{2}$

f) $\dfrac{1+\cos B}{\sin B} = \dfrac{2a+c}{\sqrt{4a^2-c^2}}$

Bài 3:Chứng mình tam giác ABC đều biết:

a) $\cot A + \cot B + \cot C = \tan\dfrac{A}{2} + \tan\dfrac{B}{2} + \tan\dfrac{C}{2}$

b) $\cos A + \cos B + \cos C = \sin\dfrac{A}{2} + \sin\dfrac{B}{2} + \sin\dfrac{C}{2}$

c) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = \dfrac{9}{4}$

d) $\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} = \dfrac{1}{8}$

e) $\begin{cases} \sin A + \sin C = 2\sin B \\ \tan\dfrac{A}{2} + \tan\dfrac{B}{2} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \end{cases}$

3.3 ĐÁNH GIÁ HAI VẾ

Những điểm cần lưu ý

i) $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1; -1 \leqslant \cos x \leqslant 1; 0 \leqslant \sin^2 x \leqslant 1; 0 \leqslant \cos^2 x \leqslant 1$

ii) $\begin{cases} A \geqslant 0; B \geqslant 0 \\ A + B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$

iii) $A^2 + B^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} |A| \leqslant 1, |B| \leqslant 1 \\ A + B = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \end{cases}$$

iv) $\begin{cases} A \geqslant M \\ B \leqslant M \\ A = B \end{cases} \Leftrightarrow A = B = M$

Ví dụ 3.5. $\cos x + \cos 2x + \cos 4x = 3$ (1)

Ta có $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1; -1 \leqslant \cos 2x \leqslant 1; -1 \leqslant \cos 4x \leqslant 1$ với mọi x

Do đó $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos 2x = 1 \\ \cos 4x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ 2x = k2\pi \\ 4x = k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = k\pi \\ x = \dfrac{k\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = k2\pi$

Ví dụ 3.6. $\sin x . \sin 5x = 1$

Ta có $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1; -1 \leqslant \sin 5x \leqslant 1$ với mọi x

Do đó

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin 5x = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin 5x = -1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ 5x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ 5x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{k2\pi}{5} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{10} + \dfrac{k2\pi}{5} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow x = x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$$

Ví dụ 3.7. $\sin^{99} x + \cos^{100} x = 1$

Ta có $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1; -1 \leqslant \cos x \leqslant 1$

Suy ra

$$\begin{cases} \sin^{99} x \leqslant \sin^2 x \\ \cos^{100} x \leqslant \cos^2 x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin^{99}x + \cos^{100}x \leqslant \sin^2x + \cos^2x = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin^{99}x = \sin^2x \\ \cos^{100}x = \cos^2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2x\left(\sin^{97}x - 1\right) = 0 \\ \cos^2x\left(\cos^{98}x - 1\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin^2x = 0 \\ \sin^{97}x - 1 = 0 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \cos^2x = 0 \\ \cos^{98}x - 1 = 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = 1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x = \pm 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = 1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sin x = 0 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = k\pi \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = k\pi \end{array}\right.$$

Bài tập

1. $\cos^7 x + \sin^4 x = 1$
2. $\sin^4 x + \cos^1 5x = 1$
3. $\sin^3 x + \cos^3 x = 2 - \sin^4 x$
4. $8\sin^{100} x + 7\cos^{10} x = 8$
5. $\sin x + \cos 4x + \sin 5x = 3$
6. $\cos x + \cos 8x - 2 = 0$
7. $\sin 2x. \sin 8x = 1$
8. $\sin^2 x + \dfrac{1}{4}\sin^2 3x = \sin x. \sin^2 3x$
9. $\sin^5 x - \cos^2 x = 1$
10. $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$

11. $\sin x + \cos x = \sqrt{2}(2 - \sin 3x)$

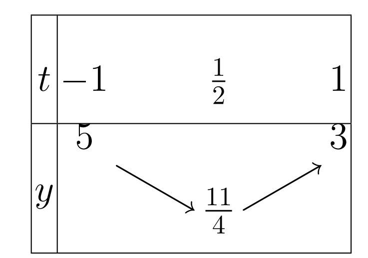
3.4 PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CHỨA THAM SỐ

Ví dụ 3.8. Tìm m để phương trình sau có nghiệm $\sin^2 x - \sin x - m + 3 = 0 (1)$

Đặt $t = \sin x, t \in [-1; 1]$

Khi đó (1) trở thành $t^2 - t - m + 3 = 0 \Leftrightarrow t^2 - t + 3 = m$

Xét hàm số $y = t^2 - t + 3$ BBT



Dựa vào BBT, phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $\frac{11}{4} \leqslant m \leqslant 5$

Bài tập

Bài 1: Tìm m để phương trình sau đây có nghiệm

1. $\cos 2x + \cos x + m - 1 = 0$
2. $(2 + \sin x)(2 + \cos x) = m$ HD đặt $t = \sin x + \cos x$
3. $\sin x . \cos x = 6(\sin x + \cos x + m)$
4. $\tan^2 x + \cot^2 x = m(\tan x - \cot x)$
5. $\sqrt{3} \sin^2 x + \frac{1}{2} = m$
6. $(m + 1) \sin x + \cos x = 2$
7. $2 \sin 2x - (2m + 1)\ sinx + m = 0$

Bài 2: Giải và biện luận các phương trình

1. $(m - 1) \cos x + m = 0$

2. $\sqrt{m}\tan x + m - 1 = 0$

3. $\sin m.\cos 2x = 1$